Aktivita: # KAŽDÝ LIST SA POČÍTA

Autor:
Ing. Beáta Ľubová, Spojená škola Nižná

Cesta na kurikulum:

PREDMET	ROČNÍK	TEMATICKÝ CELOK
Environmentálna výchova	4. ročník SŠ	• Uvedomenie si významu zelene okolo nás
Matematika	4. ročník SŠ	• Polynómy • Integrál (rozširujúce učivo)

Minutáž: 45 minút

Potrebujem: učebňu s možnosťou pripojiť sa na internet, matematický softvér – voľne stiahnuteľný (napríklad Funkce)

Provokačná myšlienka: Zamysleli ste sa niekedy nad tým, koľko kyslíka získavame z 1 stromu? Aký je význam zelene v našom okolí? Aká veľká je plocha jedného listu a aké množstvo kyslíka z tohto listu získavame? Počítajme, odhadujme, skúmajme!

Krok po kroku:
1. Veďte so žiakmi motivačný rozhovor na tému význam zelene. Vyberte strom, ktorého list budete skúmať. Keďže sme túto úlohu riešili v zimnom období, pracovali sme s náčrtmi listu v programe adobe.
2. Žiakom zadajte úlohu vo forme projektovej úlohy – matematický algoritmus riešenia:
   - stanovenie funkcie, ktorá opisuje tvar listu,
   - výpočet obsahu listu na základe určitého integrálu,
   - odhad plochy listov za jeden strom,
   - množstvo vyprodukovaného kyslíka z jedného stromu/listu.
3. Skontrolujte žiacke riešenia (príloha 1).

Príloha 1 **Ukážka vypracovanej úlohy, žiakom našej školy:**
Projekt:

Obsah listu buka lesného a množstvo vyprodukovaného kyslíka

Peter Ľuba

Obsah

Kľúčové slová

obsah rovinného útvaru, Lagrangeova metóda, určitý integrál

Anotácia

V práci autor popisuje stanovenie obsahu rovinného útvaru ohraničeného krivkou. Pomocou Lagrangeovej metódy stanovil predpis funkcie, ktorá ohraničuje daný útvar. Všetky predpoklady a údaje, ktoré použil vo výpočte, sú len produktom odhadu autora, nakoľko v aktuálnom ročnom období nie sú k dispozícií reálne materiály (list buka lesného).

Úvod

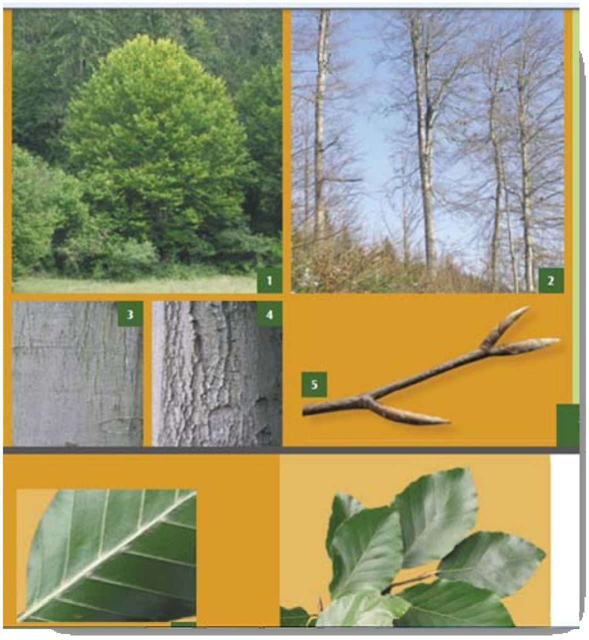
Vo svojej práci som sa snažil určiť obsah plochy listu buka lesného. Výsledok práce je len výsledkom mojich odhadov, pretože som nepracoval s reálnym materiálom. Listy buka lesného budú v štandardných rozmeroch v našich klimatických pomeroch – sever Slovenska, až v máji.
Všetky predpoklady, z ktorých som ďalej vychádzal vo výpočte sú teda len približné. Zaujímavé by bolo, vrátiť sa k obsahu tejto práce (k riešeniu tejto úlohy), o dva mesiace, keď už budú listy na stromoch a previesť ešte raz celý výpočet s reálnym materiálom. Následne porovnať oba výsledky a stanoviť v percentách presnosť odhadu.
V prvej kapitole práce sa zaoberám morfológiou listu buka lesného. Čerpal som zo zdrojov, ktoré sú voľne dostupné. V druhej kapitole opisujem spôsob stanovenia obsahu rovinného útvaru, ktorý je ohraničený krivkou. V ďalšej časti práce je uvedený samotný výpočet obsah listu buka lesného.
Téma, ktorej sa dotýka aj táto práca, je zaujímavá a všetci sa s ňou stretávame pri riešení reálnych problémov. Práve prepočítaním niekoľkých takýchto príkladov a porovnaním daného obsahu s obsahom pravidelného rovinného útvaru môžeme získať presnejší odhad.

1 List buka lesného
(Fagussylvatica)

Vybral som si list buka lesného. Môj výber ovplyvnil hlavne fakt, že list je málo členitý. Ďalším dôležitým faktom je, že v tomto ročnom období nenájdem v prírode žiadne listy stromov. Preto som postupoval podľa obrázkov, ktoré sú uverejnené na internete. Ak by som chcel čakať na reálny list z buka lesného, v našej lokalite, musel by som počkať ešte aspoň do konca mája (podľa počasia).

Rozmery listu buka lesného:
- dĺžka listu: 4-10 cm,
- šírka listu: 3-7 cm,
- listová čepeľ je vajcovitá až v tvare elipsy.

Výška stromu: 30-50 m.

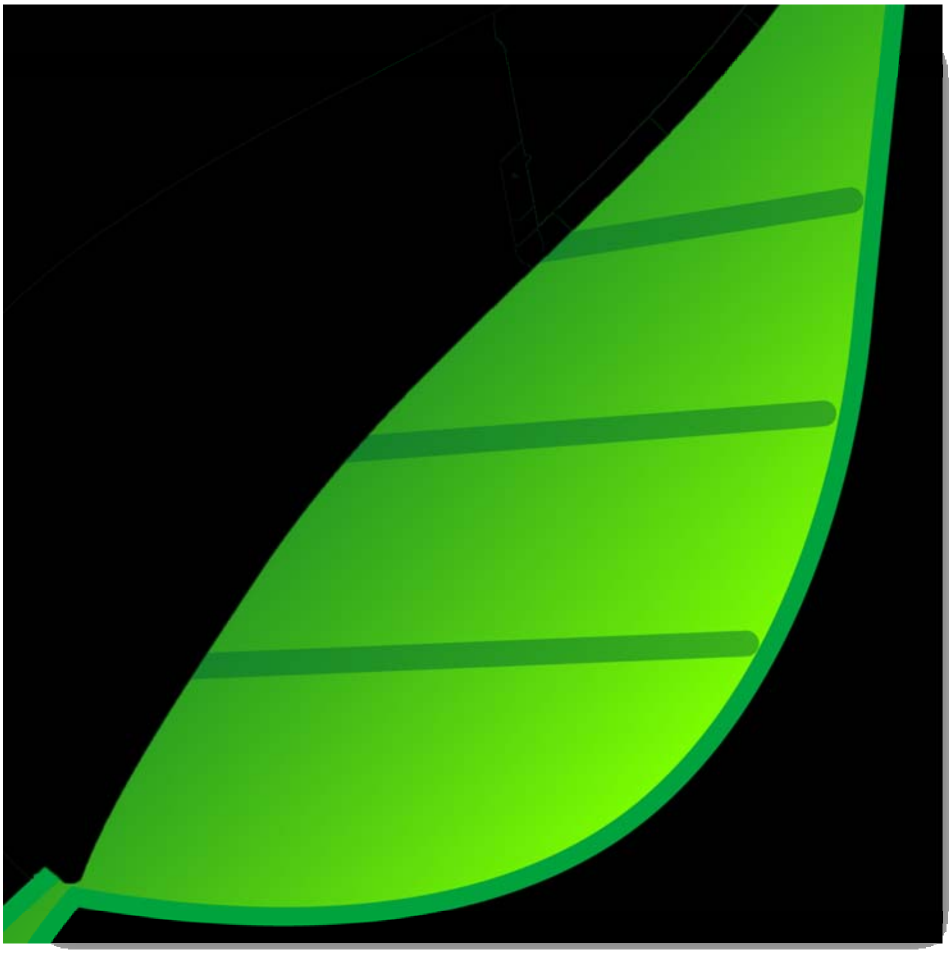


Obr. 1 Buk lesný

Prameň: www.dreviny.sk

Odhad počtu konárov na jednom strome: 100 hlavných vetiev. Každá hlavná vetva sa ďalej košatí na približne na 5 konárov. Buk lesný má širokú rozložitú korunu. Na jednom konári sa nachádza približne 50 listov. Môj odhad počtu listov na jednom menšom strome – výška 30 metrov, je 25 000 listov.

Jeden list:
Východiská: dĺžka listu = 7 cm
Najširšie miesto: 6 cm
Zakreslil som si list cez   adobephotoshop:



Obr.2 Polovica listu buka lesného- len pre vytvorenie predstavy s akou časťou pracujem(odseknutá posledná hodnota intervalu)

Prameň: vlastný zdroj

Vypočítam obsah jednej polovice listu a výsledok len násobím dvojkou.

2 Obsah útvaru ohraničeného krivkami

Existuje niekoľko matematických postupov, ktorých použitím získame obsah útvaru, ktorý je ohraničený krivkami.

Napríklad je to metóda obdĺžnikov. Zjednodušený princíp tejto metódy: rozdelím si rovinný útvar na dieliky, nad ktorými zakresľujem dvojicu obdĺžnikov. Jeden obdĺžnik na danom intervale má minimálny obsah – teda dotýka sa hornej krivky zvnútra a druhý obdĺžnik na tom istom intervale sa dotýka krivky zvonka – má maximálny obsah. Zmenšovaním intervalov sa dostávame postupne ku skutočnému – najpresnejšiemu obsahu útvaru ohraničeného dvoma krivkami. Tento postup som našiel pri definícii určitého integrálu.

Problém, ktorý som musel vyriešiť ako prvý: stanoviť predpis krivky, ktorá opisuje čepeľ polovice listu.

Použil som metódu: Lagrangeov interpolačný polynóm.

LAGRANGEOV POLYNÓM:

Lagrangeov polynóm, pomenovaný podľa Josepha Louisa Lagrangea, je v numerickej matematike interpolujúci polynóm pre danú množinu bodov v Lagrangeovom tvare. V roku 1779 ho objavil Edward Waring a v roku 1783 ho znovuobjavil Leonhard Euler.

$$L(x) = \frac{(x-a_1)\dots(x-a_{x-1})(x-a_{x+1})\dots(x-a_u)}{(a_x-a_1)\dots(a_x-a_{x-1}).(a_x-a_{x+1})\dots(a_x-a_u)}$$

Všeobecný tvar LAGRANGEOVEJ INTERPOLÁCIE:

$f(x) = l_x(x)\ .\ f(a_x)+E(x)$

$l_x(x)$ je Lagrangeov polynóm
a_x je tabuľková hodnota, ktorá je zadaná
$E(x)$ je chyba aproximácie
u = index vo všetkých Lagrangeových polynómoch je počet bodov (tabuľkových hodnôt)
a_1 je prvý tabuľkový bod
a⍰ posledný tabuľkový bod

Konkrétne som si určil tri body: (0,0), (3,4), (7,0), ktoré patria krivke zobrazujúcej list a použil som nasledovný postup:

$$l_0(x) = \frac{(x-x_1).(x-x_2)}{(x_0-x_1).(x_0-x_2)}$$
$$l_1(x) = \frac{(x-x_0).(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}$$
$$l_2(x) = \frac{(x-x_0).(x-x_1)}{(x_2-x_0).(x_2-x_1)}$$
$$L(x_0, x_1, x_2) = y_0 . l_0(x) + y_1 . l_1(x) + y_2 . l_2(x)$$

Týmto postupom získam krivku, ktorá ohraničuje spolu s osou x útvar, ktorého obsah chcem vypočítať.

3 Výpočet obsahu listu buka lesného

Stanovil som si tri body: $X_0 = [0,0]$, $X_1 = [3,4]$, $X_2 = [7,0]$

$$y_0.l_0(x) = \frac{(x-x_1).(x-x_2)}{(x_0-x_1).(x_0-x_2)} = 0 \dots l_0(x) = 0$$
$$y_1.l_1(x) = \frac{(-x^2+7x)}{3}$$
$$y_1.y_2.l_2(x) = 0.l_2(x) = 0$$
$$L\ (x_0,x_1,x_2) = y_0.l_0(x) + y_1.l_1(x) + y_2.l_2(x) = \frac{(-x^2+7x)}{3}$$

Zaujíma ma útvar ohraničený grafmi:

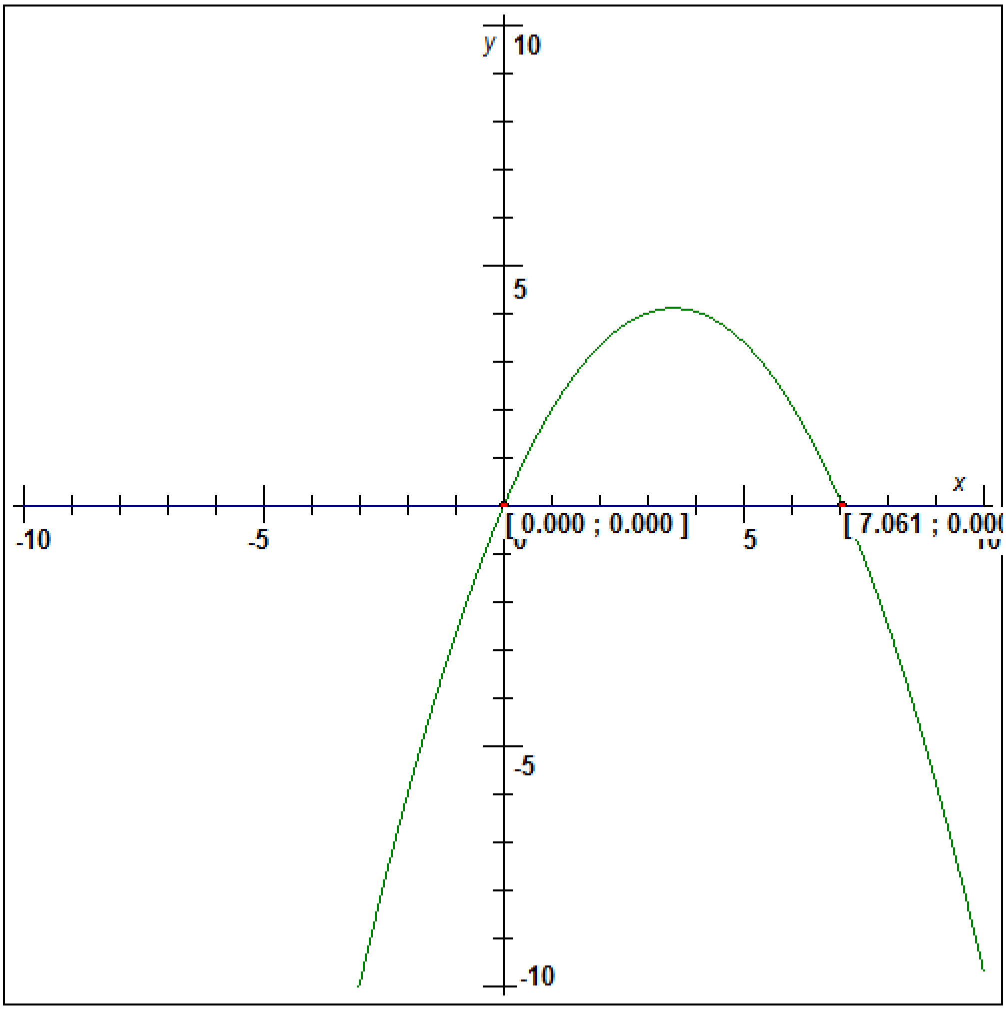
$$y = 0 \quad a \quad y = \frac{(-x^2+7x)}{3}$$

Prvá priamka je os x, vyznačená je modrou farbou a krivka – časť paraboly je znázornená zelenou farbou – viď obrázok 3.

Ďalej nasleduje výpočet obsahu tohto útvaru pomocou určitého integrálu.

$$\int_0^7 \frac{(-x^2+7x)}{3} = \frac{1}{3}.\left[\frac{-x^3}{3} + 7.\frac{x^2}{2}\right]_0^7 = 19 \text{ cm}^2$$

Odhad počtu listov je: 25 000. Vy počítaná hodnota je len polovica listu. Teda celý list má obsah: 38 cm^2.
Celkový obsah listov buka lesného podľa môjho odhadu je: 950 000 cm^2. V metroch štvorcových: 95 m^2 .



Obr.3 Grafy funkcií, ktoré ohraničujú plochu polovice listu

Prameň: vlastný návrh, program Funkce

V ďalšom kroku stanovím tento obsah pomocou viacerých bodov a stanovím rozdiel vo výpočte. Teda táto časť práce sa venuje presnejšiemu výpočtu, keďže si celkovo zvolím až deväť usporiadaných dvojíc, patriacich skúmanému objektu. Postupujem po tretinách listu.
1. časť: rozoberiem prvú časť z polovice listu: X_0 [0,0], X_1[1; 1,5], X_2[1,5; 2]

$$l_0(x) = \frac{(x-x_1).(x-x_2)}{(x_0-x_1).(x_0-x_2)}$$

$$l_1(x) = \frac{(x-x_0).(x-x_2)}{(x_1-x_0).(x_1-x_2)}$$

$$l_2(x) = \frac{(x-x_0).(x-x_1)}{(x_2-x_0).(x_2-x_1)}$$

$$l_0(x) = 0$$

$l_1(x) = -3x^2 + 4{,}5\,x$
$l_2(x) = 2{,}67x^2 - 2{,}67\,x$
$l_0(x) + l_1(x) + l_2(x) = -0{,}33x^2 + 1{,}83x$
$\int_0^{1,5}(-0{,}33x^2 + 1{,}83x) =$ 1,6875 cm^2 – polovica plochy listu
Celá časť listu, zodpovedajúca danému intervalu je : 3,375 cm^2.

2. druhá časť z polovice listu: X_0 [3;4], X_1[4; 3,8], X_2[5; 3]
$l_0(x) = \frac{(x-x_1).(x-x_2)}{(x_0-x_1).(x_0-x_2)}$
$l_1(x) = \frac{(x-x_0).(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}$
$l_2(x) = \frac{(x-x_0).(x-x_1)}{(x_2-x_0).(x_2-x_1)}$
$l_0(x) = 2x^2 - 18x + 40$
$l_1(x) - -3{,}8x^2 + 30{,}4x - 57$
$l_2(x) = 1{,}5x^2 - 10{,}5\,x + 18$
$l_0(x) + l_1(x) + l_2(x) = -0{,}3\,x^2 + 1{,}9x + 1$

$\int_3^5(-0{,}3x^2 + 1{,}9x + 1) =$ 7,4 cm^2.
Celá časť listu, zodpovedajúca danému intervalu je 14,8 cm^2.

3. tretia časť z polovice listu: X_0 [5,5; 2,8], X_1[6; 2,5], X_2[7; 0]
$l_0(x) = \frac{(x-x_1).(x-x_2)}{(x_0-x_1).(x_0-x_2)}$
$l_1(x) = \frac{(x-x_0).(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}$
$l_2(x) = \frac{(x-x_0).(x-x_1)}{(x_2-x_0).(x_2-x_1)}$
$l_0(x) = 3{,}73x^2 - 48{,}49x + 156{,}66$
$l_1(x) = -5x^2 + 62{,}5x - 192{,}5$
$l_2(x) = 0$
$l_0(x) + l_1(x) + l_2(x) = -1{,}27x^2 + 14x - 35{,}84$

$\int_{5,5}^{7}(-1{,}27x^2 + 14\,x - 35{,}84) =$ 2,72 cm^2.
Celá plocha listu na danom intervale predstavuje hodnotu 5,44 cm^2.
Celá plocha listu je podľa presnejšieho výpočtu: 23, 615 cm^2.
Porovnanie výpočtov:
Rozdiel medzi prvým a druhým -presnejším výpočtom je značný, až 38%.
Ak som uvažoval o strome s 25 000 listami, tak celkový obsah bude predstavovať pri presnejšom určení obsahu jedného listu, hodnotu 590 375 cm^2 a teda 59, 0375m^2 . Pri menej presnom určení obsahu listu, nám celková plocha listov stromu dá hodnotu: 95 m^2. Teda rozdiel je skutočne veľký.
Zaujímavé by bolo zvoliť ďalšie body a zistiť, či opäť by ten rozdiel bol väčší ako 30%. Môj predpoklad je, že už by bol miernejší.
Prvé riešenie teda považujem len za hrubý odhad. Postupným delením intervalu na menšie úseky sa blížim k presnejšej hodnote.
Avšak aj táto hodnota je stanovená len na základe odhadu rozmeru listu. Preto úlohu považujem za otvorenú, pokiaľ nebudem môcť pracovať s niekoľkými listami buka lesného.

Množstvo kyslíka, ktorý vyprodukuje buk lesný za jednu hodinu je 1,7kg. Keďže plocha listov podľa môjho výpočtu a odhadov je približne 60 m^2, tak na jeden list pripadá za hodinu vyprodukované množstvo kyslíka: 7 miligramov.

Záver

Úloha, ktorú som riešil, bola celá postavená na odhade. Zaujímalo by ma, aký je presný môj odhad. Preto sa k úlohe vrátim počas letných prázdnin a budem počítať s reálnymi údajmi, so skutočným listom buka lesného. Odhadoval som aj počet listov na jednej vetve a tento údaj by som si chcel tiež overiť.

Keď porovnám obsah listu, ktorý mi vyšiel, teda 38 cm^2 s obsahom obdĺžnika, ktorý by mal dĺžku 7 cm a šírku 8 cm, teda 56 cm^2, uvedomím si rozdiel v ich obsahoch. Uvedomenie si rozdielu medzi presnejším a zjednodušeným – pravidelným útvarom mi môže pomôcť pri rozhodovaní v aplikačných úlohách, v ktorých nemusím vždy počítať s presnosťou na desiatky, prípadne môžem zaokrúhliť výsledok. Pri počítaní s 9 dvojicami bodov, ktoré patria danému listu, získavam ešte presnejšiu hodnotu, ktorá je značne odlišná od prvého výpočtu, až o 14, 385 cm^2 (38%). Lagrangeova metóda na stanovenie predpisu polynómu, ktorý najlepšie opisuje priebeh reálnej krivky je zaujímavá a stretol som sa s ňou prvý krát. Viem, že už som sa niekedy zamýšľal nad tým, ako vypočítať obsah nepravidelného útvaru, keď nepoznám predpis funkcií, ktoré útvar ohraničujú. Táto metóda je veľmi užitočná a poskytla mi ďalšiu „slobodu v riešení“ úloh.

Cieľom tejto práce bolo:

- naučiť sa používať Lagrangeovu metódu a aplikovať ju v problémovej úlohe,
- stanoviť na základe vstupných údajov – odhad a ďalej s ním pracovať,
- vytvoriť prvú časť materiálu, na ktorý budem nadväzovať v ďalších výpočtoch (takto rád pracujem- zaoberám sa určitou témou, skúmam ju, zaznačím medzivýsledky a o istý čas sa k nej vrátim a snažím sa posunúť ďalej, keďže budem mať aj nový „výskumný materiál“),
- zbierať skúseností v oblasti matematickej práce
- stanoviť množstvo produkovaného kyslíka pripadajúceho na jeden list.